MATHEMATICS 201-NYA-05
Differential Calculus
Martin Huard
Fall 2011

I - Limits

1. Evaluate the following limits using a table of values.

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+2x-8}$

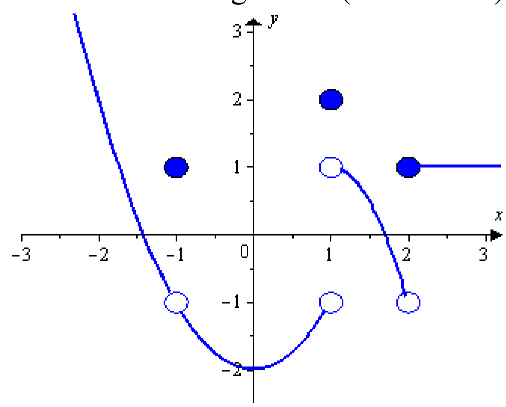
2. For the function *f* whose graph is given, find the value of the following limits (or function), or explain why it does not exist.

   a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

   d) $f(-1)$ e) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

   g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ h) $f(1)$ i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

   j) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ k) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ l) $f(2)$



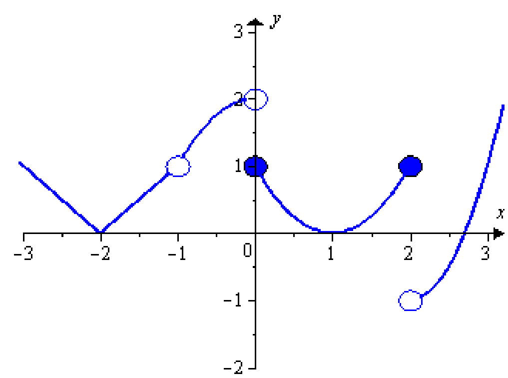
3. For the function *f* whose graph is given, find the value of the following limits (or function), or explain why it does not exist.

   a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

   d) $f(-1)$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

   g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ h) $f(0)$ i) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

   j) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ k) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ l) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$



4. Evaluate the following limits, where *f* is given below.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le -1 \\ x^3+2 & -1<x<2 \\ 3 & x=2 \\ \sqrt{x-2}+8 & x>2 \end{cases}.$$

   a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ d) $f(-1)$

   e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ h) $f(2)$

   i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ j) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ k) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ l) $f(1)$

5. Given that

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 0$$

find the limits that exist. If the limit does not exist, explain why.

a) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$ b) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^5$ c) $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$

d) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ e) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ f) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}$

g) $\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}$ h) $\lim_{x\to a}\frac{4f(x)}{g(x)-h(x)}$ i) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{1-f(x)}$

6. Evaluate the following limits.

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-10x}{2x^2-5x+2}$ c) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+9}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}$ e) $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ f) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

g) $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x}-1}{x-2}$ h) $\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}}{x^2+2x-15}$ i) $\lim_{x\to \frac{5}{2}}\frac{4x^2-25}{5-2x}$

j) $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$ k) $\lim_{y\to 0}\frac{2-\sqrt{4-y}}{y}$ l) $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}$

m) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}}$ n) $\lim_{x\to -2^+}\frac{2+t}{\sqrt{4-t^2}}$ o) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-2x}$

p) $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{x^2-4}$ q) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$ r) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)$

s) $\lim_{x\to 4}\frac{t^2-4t}{t^4-16}$ t) $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{43-x}-2\sqrt{x+2}}{x^2-8x+7}$ u) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^3+27}$

v) $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{x}{x+2}}{3-\frac{x+4}{x}}$ w) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1}$ x) $\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+5}}-\frac{1}{\sqrt{3-x}}}{x+1}$

y) $\lim_{x\to 3}\frac{\frac{4}{x+5}-\frac{x}{3x-3}}{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}$ z) $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-5x^2-2x+24}{x^3-3x^2-3x-4}$ aa) $\lim_{x\to -2}\frac{\frac{3}{x^2+4}-\frac{x-1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^2-2}+4}$

7. Evaluate the following limits.

a) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$ b) $\lim_{t\to a}\frac{\frac{1}{t+2}-\frac{1}{a+2}}{a^2-t^2}$ c) $\lim_{x\to y}\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-xy^2}$

d) $\lim_{x\to t}\frac{x^6-t^6}{x^4-t^4}$ e) $\lim_{t\to a}\frac{\sqrt{t+3}-\sqrt{a+3}}{t-a}$ f) $\lim_{x\to a}\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2-2ax}$

8. Evaluate the limit (if it exists)

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{|x-3|}$ c) $\lim_{x\to 3}\left|\frac{x^2-9}{x-3}\right|$

d) $\lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{\sqrt{x-4}}$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x^2-2x}$ f) $\lim_{x\to 2}\frac{|x|-2}{x-2}$

g) $\lim_{x\to 3} f(x)$ $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<3 \\ x^2-5 & x\geq 3 \end{cases}$ h) $\lim_{x\to -1} f(x)$ $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<-1 \\ 5 & x=-1 \\ x^2-2 & x>-1 \end{cases}$

i) $\lim_{x\to 5} f(x)$ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\frac{7}{x+2}-\frac{2}{x-3}}{x^3-125} & x<5 \\ \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{7x^2-35x} & x\geq 5 \end{cases}$

9. Use the squeeze theorem to prove the following limits.

a) $\lim_{x\to -1} f(x)=1$ if $1\leq f(x)\leq x^2+2x+2$ for all x.

b) $\lim_{x\to 0} x^4\cos\frac{3}{x}=0$

ANSWERS

1.	a) $\frac{1}{3}$	b) 0	c) $\frac{1}{6}$				
2.	a) -1	b) -1	c) -1	d) 1	e) 1	f) -1	g) $\nexists$
	h) 2	i) 2	j) -2	k) $\nexists$	l) 1		
3.	a) 1	b) 1	c) 1	d) $\nexists$	e) 1	f) 2	g) $\nexists$
	h) 1	i) 1	j) -1	k) $\nexists$	l) 0		
4.	a) 1	b) 1	c) 1	d) 1	e) 8	f) 10	g) $\nexists$
	h) 3	i) 0	j) 3	k) 3	l) 3		
5.	a) -1	b) 32	c) $\frac{1}{2}$	d) -6	e) $\frac{-2}{3}$	f) $\nexists$	g) 0
	h) $\frac{-8}{3}$	i) -1					
6.	a) 5	b) $\frac{14}{3}$	c) 0	d) $\frac{3}{5}$	e) 10	f) $\frac{1}{4}$	g) $\frac{-1}{2}$
	h) $\frac{1}{72}$	i) -10	j) 6	k) $\frac{1}{4}$	l) $\frac{1}{2}$	m) 2	n) 0
	o) 16	p) 0	q) $\frac{1}{5}$	r) $\frac{-1}{2}$	s) 0	t) $\frac{-5}{72}$	u) $\frac{5}{27}$
	v) $\frac{-3}{8}$	w) $\frac{1}{2}$	x) $\frac{-1}{8}$	y) $\frac{-3}{16}$	z) $\frac{2}{7}$	aa) $\frac{1}{8}$	
7.	a) $2a$	b) $\frac{1}{2a(a+2)^2}$	c) 0	d) $\frac{3}{2}t^2$	e) $\frac{1}{2\sqrt{a+3}}$	f) -4	
8.	a) 6	b) $\nexists$	c) 6	d) 0	e) $\nexists$	f) 1	g) $\nexists$
	h) -1	i) $\frac{1}{210}$					

9. a) since $\lim_{x\to-1} 1 = 1$, $\lim_{x\to-1}\left(x^2+2x+2\right)=1$ and $1 \le f(x) \le x^2+2x+2$

then by the squeeze theorem, $\lim_{x\to-1} f(x) = 1$.

b) we have

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$
$$-1 \le \cos\tfrac{3}{x} \le 1$$
$$-x^4 \le x^4\cos\tfrac{3}{x} \le x^4$$

since $\lim_{x\to0}\left(-x^4\right)=0$ and $\lim_{x\to0} x^4 = 0$

then, by the squeeze theorem, $\lim_{x\to0} x^4\cos\frac{3}{x} = 0$